Systèmes linéaires

Exercice 1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1)$, $v_3 = (-1,0,1)$, $w_1 = (1,2,1)$, $w_2 = (3,-2,1)$, $w_3 = (2,0,1)$, $w_4 = (1,2,2)$ et $w_5 = (1,6,2)$.

1. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?

   (a) v_1, v_2 et v_3 ? (b) w_1, w_2 et w_3 ? (c) w_1, w_2 et w_4 ? (d) w_1, w_2 et w_5 ?

2. Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solutions :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& z &=& 2\\ x &-& y && &=& 1\\ x &+& y &+& z &=& 3\end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 3y &+& 2z &=& 1\\ 2x &-& 2y && &=& 2\\ x &+& y &+& z &=& 2\end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 3y &+& 2z &=& 1\\ 2x &-& 2y && &=& 6\\ x &+& y &+& z &=& 2\end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 2y &+& 3z &=& 0\\ 2x &-& 3y &-& z &=& 0\\ 3x &-& y &+& 2z &=& 0\end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 2y &+& 3z &=& -1\\ 2x &-& 3y &-& z &=& 5\\ 3x &-& y &+& 2z &=& 4\end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& 2z &=& 5\\ x &-& y &-& z &=& 1\\ x && &+& z &=& 3\end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &-& y &+& z &+& t &=& 5\\ 2x &-& 3y &+& 4z &+& 5t &=& 12\\ 3x &+& y &+& 5z &+& t &=& 17\end{array}\right. \quad (S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &+& y &+& z &=& 3\\ 3x &-& y &-& 2z &=& 0\\ x &+& y &-& z &=& -2\\ x &+& 2y &+& z &=& 1\end{array}\right. \quad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& y &+& z &+& t &=& 1\\ x &-& y &+& 2z &-& 3t &=& 2\\ 2x && &+& 4z &+& 4t &=& 3\\ 2x &+& 2y &+& 3z &+& 8t &=& 2\\ 5x &+& 3y &+& 9z &+& 19t &=& 6\end{array}\right.$$

Exercice 3. Soient a, b, c, m des paramètres réels. Résoudre les systèmes suivants en discutant éventuellement en fonction de la valeur des paramètres :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x &-& y &+& 2z &=& a\\ -x &+& 2y &-& 3z &=& b\\ 2x &+& y &-& z &=& c\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 1\\ 2x &+& y &+& z &=& 2b\\ x &+& 3y &+& 3z &=& 1-b\end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcl} x &+& (m+1)y &=& m+2\\ mx &+& (m+4)y &=& 8\end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcl} mx &+& (m-1)y &=& m+2\\ (m+1)x &-& my &=& 5m+3\end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& my &+& z &=& 1\\ (m+1)x &+& 2y &+& (m-3)z &=& -1\\ (m-1)x && &-& 3z &=& -1\end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx &+& y &+& z &=& 1\\ x &+& my &+& z &=& 1\\ x &+& y &+& mz &=& 1\end{array}\right.$$

$$(S_7)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax &+& by &+& z &=& 1\\ x &+& aby &+& z &=& b\\ x &+& by &+& az &=& 1\end{array}\right. \qquad (S_8)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& y &+& z &+& t &=& 1\\ x &+& ay &+& z &+& (2-a)t &=& b\\ x &+& (2-a)y &+& z &+& at &=& b\end{array}\right.$$

Matrices

Exercice 1.

1. Donnez la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{3,3}$ telle que $\forall i, j;\ 1 \leq i, j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule $a_{ij} = 3i - j^2$.
2. Donner un exemple de matrice symétrisue et une exemple de matrice antisyumétrique de $\mathcal{M}_{3,3}$.

Exercice 2. On donne $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$. Trouver x et y pour que

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez et comparez $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$.

Exercice 5.

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer AB et AC. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{3,3}$ telles que $AM = 0$.
2. Soient A et B deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si $AB = 0$, les matrices A et B ne sont pas inversibles.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$ où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9. En utilisant le pivot de Gauss, inverser les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une similitude (composée d'une homothétie et d'une rotation) dont on précisera le centre, l'angle et le rapport.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.